PERMUTĂRI

Mulţimile ordonate care se formează cu n elemente din n elemente date se numesc permutări. Notăm cu P_n numărul permutărilor cu n elementelor .

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n \overset{notat}{=} n!$$

Proprietăţi

$0! = 1$

$n! = (n-1)!n$

$n! = (n-2)!(n-1)n$

$n! = (n-k)!(n-k+1)\cdot \ldots \cdot (n-1)n$

1. **În câte moduri se pot aranja 5 fotografii într-un album?**
2. **Câte numere de 4 cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $A=\{1,2,3,4\}$? Dar cu elementele mulţimii $B=\{0,1,2,3\}$?**
3. **Calculaţi**
   - **a)** $3!+4!$ $\qquad$ $5!+3!$
   - **b)** $6!-5!$ $\qquad$ $10!-9!$
   - **c)** $\frac{124!}{125!}$ $\qquad$ $\frac{2011!}{2010!}$
   - **d)** $\frac{n!}{(n+2)!}$ $\qquad$ $\frac{n!}{(n-2)!}$
   - **e)** $\frac{(2n+1)!}{(2n-2)!}$ $\qquad$ $\frac{(2k-4)!}{(2k-2)!}$
   - **f)** $\frac{(2n+m)!}{(2n+m+1)!}$ $\qquad$ $\frac{(2n+1)!}{(2n-2)!}$
   - $g)$ $\frac{(2-n)!}{(3-n)!}$ $\qquad$ $\frac{(5-n)!}{(7-n)!}$
4. **Efectuaţi calculele:**
   - **a)** $\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}$ $\qquad$ $\frac{1}{5!}-\frac{2}{4!}$
   - **b)** $\frac{1}{0!}-\frac{2}{1!}$ $\qquad$ $\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}$
   - **c)** $\frac{(1!+2!+3!)}{9!(10!-8!)}:\frac{2}{7!}$ $\qquad$ $\frac{(1!+2!+3!+4!)}{5!(9!-8!)}:\frac{10}{8\cdot 8!}$
   - **d)** $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!-4\cdot 4!$ $\qquad$ $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+4\cdot 4!$
5. **Scrieţi permutările mulţimii** $A=\left\{0!, 2!-1!, \frac{5\cdot 4!\cdot 4}{2!5!}\right\}$

6. Să se rezolve ecuaţiile pentru $n \in \mathbb{N}^*$ **:**

a) $n! = 24$ **;**

b) $\frac{(n+2)!}{(n+1)!} = 7$ **;**

c) $\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = 20$

d) $\frac{(n+1)!}{(n-3)!} = \frac{30(n+1)!}{(n-1)!}$ **;**

e) $\frac{P_{n+3}}{P_{n+1}} = 56$ **.**

7. Rezolvă inecuaţiile în $n \in \mathbb{N}^*$ **:**

a) $\frac{P_{x+7}}{P_{x+8}} \geq \frac{1}{16}$

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} \leq 72$

8. Rezolvă sistemul: $\begin{cases} P_{x-y} = 3P_{x-y-1} \\ P_{2x-y+1} = 8P_{2x-y} \end{cases}$

9. Demonstraţi relaţia

$nP_n = P_{n+1} - P_n$ **şi apoi calculaţi**

$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$ **şi** $\sum_{k=1}^{n} k!(k+1)^2$

10. Demonstraţi relaţia

$\frac{n}{P_{n+1}} = \frac{1}{P_n} - \frac{1}{P_{n+1}}$ **şi apoi calculaţi**

$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ **şi** $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k+1}{(k+1)! \cdot k \cdot (k+1)}$

11. Calculaţi sumele:

i) $\sum_{k=1}^{n} (k-1)! \cdot k^2$

ii) $\sum_{k=1}^{n} k! \cdot (k^2+k+1)$

iii) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{(k+1)!}$

iv) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)!}{(k-1)!}$

ARANJAMENTE

Submulţimile ordonate care se formează cu k elemente din n elemente date se numesc aranjamente. Notăm cu A_n^k aranjamente de n luate câte k.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k\ factori}$$

Proprietăţi

$A_n^0 = 1$

$A_n^1 = n$

$A_n^n = n!$

$A_n^k = (n-k+1)A_n^{k-1}$ **sau** $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$ **formula de recurență**

1. **Câte numere de 4 cifre distincte se pot forma cu cifrele 1,2,3,4,5,6?**
2. **Câte numere de 3 cifre distincte se pot forma cu cifrele 0,1,2,3,4 ?**
3. **Completaţi tabelul:**

a	b	a-b	a·b	a/b	(a+b)/a	(a+b)/b	(a-b)/a	(a-b)/b
A_6^4	A_6^0							
A_3^1	A_3^2							
A_7^4	A_7^3							

4. **Calculaţi:**

   a) i. $\frac{A_8^6 + A_8^5}{A_8^4}$ **ii.** $\frac{A_4^3 + A_5^4}{A_4^3}$ **iii.** $\frac{A_7^4 + A_6^5}{A_5^4}$

   b) i. $\frac{A_7^3 + A_6^4}{A_5^3}$ **ii.** $\frac{A_5^4 + A_6^5}{A_6^4}$ **iii.** $\frac{A_7^4 + A_6^5}{A_5^4}$

   c) i. $\frac{A_n^{k-1}}{A_n^{k+1} + A_n^k}$ **ii.** $\frac{(2n-k+2)A_{2n}^{k-3}}{A_{2n}^k + A_{2n}^{k-1}}$ **iii.** $\frac{A_n^k - nA_{n-1}^{k-1}}{A_{n+1}^{k+1}}$

5. **Arătaţi că:**

   a) $A_n^{n-1} = A_n^n$ **b)** $A_{n+1}^{k+1} = (n+1)A_n^k$ **c)** $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$

6. **Rezolvaţi ecuaţiile:**

a) i. $A_{n-5}^{3}=24$ **ii.** $A_{x}^{4}=30(x-2)(x-3)$

b) i. $A_{n+3}^{3}=30\frac{P_{n+1}}{P_{n}}$ **ii.** $6(x-5)!\cdot A_{x-2}^{5}=x!$

c) i. $\frac{A_{n}^{10}-A_{n}^{8}}{A_{n}^{8}}=131$ **ii.** $A_{n+4}^{3}=20A_{n+2}^{1}$

7. Rezolvă inecuaţiile:

a) i. $A_{2n-1}^{2}\leq 930$ **ii.** $A_{x}^{4}\leq 30(x-2)(x-3)$

b) i. $A_{n+1}^{3}\leq 90\cdot\frac{P_{n-1}}{P_{n}}\cdot A_{n+1}^{2}$ **ii.** $6(x-5)!\cdot A_{x-2}^{5}\leq x!$

c) i. $182A_{n}^{2}\geq A_{n+2}^{4}$ **ii.** $A_{10}^{x}\leq 5A_{10}^{x-1}$

8. Rezolvaţi sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 8A_{x+1}^{y-4}=A_{x+1}^{y-3} \\ 2A_{x}^{y}\cdot\frac{P_{x-y}}{P_{x-1}}+6\frac{y}{x-1}A_{x-1}^{y}\frac{P_{x-y-1}}{P_{x-2}}=54 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 12A_{2x+y}^{2y}=\frac{P_{2x+y}}{P_{2x-y-1}} \\ A_{2x+y}^{y-1}=342A_{2x+y}^{y-3} \end{cases}$

9. Arătaţi că $A_{n}^{k+1}=(n-k)A_{n}^{k}$ **şi apoi calculaţi** $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{A_{n}^{k+1}}{A_{n}^{k}}$

10. Arătaţi că $A_{n}^{k}=nA_{n-1}^{k-1}$ **şi apoi calculaţi** $\sum_{k=1}^{n}\frac{A_{n}^{k}}{A_{n-1}^{k-1}}$

11.Arătaţi că $A_{n}^{k}-A_{n}^{k11}=(n-k)A_{n}^{k-1}$ **şi apoi calculaţi** $\sum_{k=1}^{n}(n-k)A_{n}^{k-1}$

12.Calculaţi sumele:

a) $\sum_{k=2}^{n}\frac{A_{k+4}^{4}}{A_{k+4}^{6}}$

b) $\sum_{k=1}^{n}(n-k)A_{n}^{k-1}$

c) $\sum_{k=1}^{n}\left(A_{n}^{k}-A_{n}^{k-1}\right)$

COMBINĂRI

Submulţimile care se formează cu k elemente din n elemente date se numesc combinări.

Notăm cu C_n^k combinări de n luate câte k.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{P_k},\ 0 \le k \le n,\ n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}.$$

1. **Fie mulţimea $A = \{1,2,3,4\}$. Scrie toate submulţimile mulţimii A cu 3 elemente.**
2. **Într-o clasă sunt 25 elevi. În câte moduri se poate forma o grupă de 5 elevi în vederea participării la o competiţie?**
3. **Într-o clasă sunt 23 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete şi 2 băieţi.**
4. **Completaţi tabelul:**

$C_7^5 =$	$C_{15}^{10} =$
$C_{10}^7 =$	$C_{2n+1}^{2k+1} =$
$C_7^5 + C_7^4 =$	$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 =$
$\frac{C_6^3 + C_6^2}{C_7^3} =$	$\frac{C_5^3 - C_5^4}{C_5^2} =$
$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 =$	$C_7^0 + C_7^2 + C_7^4 + C_7^6 =$

5. **Rezolvaţi ecuaţiile:**

   a) i. $C_n^3 = 2n$ **ii.** $C_{x+2}^2 = 3$ **iii.** $11C_x^3 = 24C_{x+1}^2$

   b) i. $A_{n+1}^3 + C_{n+1}^3 = 392$ **ii.** $C_{n+1}^5 = \frac{(n-3)n(n+1)}{6}$ **iii.** $C_x^3 + C_x^4 = 11C_{x-1}^2$

   c) i. $\frac{C_{2n}^{n-1}}{C_{2n-1}^n} = \frac{5}{3}$ **ii.** $C_{n+1}^{n-2} + 2C_{n-1}^3 = 7(n-1)$ **iii.** $C_x^3 = 2C_x^{x-2}$

6. **Rezolvă inecuaţiile:**

a) i. $C_n^6 > C_n^4$**; ii.** $C_x^5 > C_x^7$ **iii.** $C_x^5 < C_x^6$

b) i. $C_{12}^n \le C_{12}^{n+2}$ **ii.** $C_{20}^{x-1} < C_{20}^x$ **iii.** $5C_x^3 < C_{x+2}^4$

c) i. $C_x^{x-1} \le C_x^{x-3}$ **ii.** $C_{2x}^{2x-8} \ge C_{2x}^{2x-12}$ **iii.** $xC_{x-1}^{x-3} - 7C_{x-2}^{x-3} \le 8(x-2)$

7. Demonstrează egalităţile:

a) $C_n^k = C_n^{n-k}$ **(formula combinărilor complementare)**

b) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ **(formula de recurenţă pentru combinări)**

c) $nC_{n-1}^{k-1} = kC_n^k$ **(formula de calcul pentru sume)**

d) $\dfrac{C_n^k}{k+1} = \dfrac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$ **(formula de calcul pentru sume)**

8. Calculaţi sumele:

a) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k$

b) $\sum_{k=0}^{n} (2k+1) \cdot C_n^k$

c) $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{C_n^k}{k+1}$

9. Să se determine numărul natural n astfel ca următorii termeni să fie în progresie aritmetică $C_{x+1}^x, A_4^2, C_{x+5}^{x+3}$**.**

10. Rezolvați sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 5A_x^y = A_x^{y+1} \\ \dfrac{C_{2x+y}^4}{C_{2x+y}^3} = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} A_{x+y}^y = \dfrac{P_{x+y}}{24} \\ C_{x+4}^{y+2} = C_{x+4}^y \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} A_y^x : P_{x-1} + C_y^{y-x} = 126 \\ P_{x+1} = 720 \end{cases}$

11. Să se determine $n \in \mathbb{N}$**, astfel încât** C_n^5 **să dividă** C_{n+1}^5

12. Demonstrați egalitatea:

$$\frac{C_n^0}{n+1} + \frac{C_n^1}{n} + \frac{C_n^2}{n-1} + \ldots + \frac{C_n^n}{1} = \frac{2}{n+1}\left(2^n - \frac{1}{2}\right)$$